Evaluation

Exercice 1

n est un entier relatif différent de -2.

On pose $a = 24n + 8$ et $b = n + 2$.

Pour quelles valeurs de n, b divise-t-il a ?

Exercice 2

Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3 + 2n^2 - 1$ soit divisible par 5.

Exercice 3

1) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n non nul, le reste de la division de 4^n par 9.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$$

Correction

Exercice 1
n est un entier relatif différent de -2.
On pose $a = 24n + 8$ et $b = n + 2$.
Pour quelles valeurs de n, b divise-t-il a ?

Correction
$a = 24n + 8 = 24(n + 2) - 40$
soit $a = 24b - 40$
Si b divise a alors b divise $a - 24b$, donc b divise 40.
L'ensemble des valeurs possibles de b est donc l'ensemble des diviseurs de 40
soit : $\{-40\,;-20\,;-10\,;-8\,;-5\,;-4\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;4\,;5\,;8\,;10\,;20\,;40\}$
Comme $n = b - 2$, on en déduit l'ensemble des valeurs possibles de n :
$$\{-42\,;-22\,;-12\,;-10\,;-7\,;-6\,;-4\,;-3\,;-1\,;0\,;2\,;3\,;6\,;8\,;18\,;38\}$$
Remarque : on peut vérifier le résultat sur des valeurs particulières
Pour $n = -7$, $a = 160$ et $b = -5$
Pour $n = 18$, $a = 440$ et $b = 20$

Exercice 2
Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3 + 2n^2 - 1$ soit divisible par 5.

Correction
On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 5 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$n^3 \equiv$	0	1	3	3	4
$2n^2 \equiv$	0	2	3	3	2
$n^3 + 2n^2 - 1 \equiv$	4	2	0	4	0

Les entiers naturels n cherchés sont les entiers $n = 5k + 4$ et $n = 5k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 3
1) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n non nul, le reste de la division de 4^n par 9.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$$

Correction

1) On a : $4^0 \equiv 1[9]$ $4^1 \equiv 4[9]$ $4^2 \equiv 7[9]$ $4^3 \equiv 1[9]$
   Ainsi la suite des restes de 4^n par 9 est périodique, de période 3 :
   Si $= 3p$, $4^n \equiv 1[9]$ Si $n = 3p + 1$, $4^n \equiv 4[9]$ Si $n = 3p + 2$, $4^n \equiv 7[9]$
2) On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 9 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4^n \equiv$	1	4	7	1	4	7	1	4	7
$3n \equiv$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
$4^n - 3n - 1 \equiv$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ pour tout entier naturel n